

Das MINI-Element zur Behandlung der stationären Stokes-Gleichung

9th May 2006

Vortrag von Holger Blasum im Rahmen des Seminars Numerik von Differentialgleichungen und Optimierung (Prof. Schäfer/Richert, Mathematik LMU München), am 02. Mai 2006 und 09. Mai 2006 (URL: <http://www.blasum.net/holger/wri/math/an/num/mini/>).
Warnung: Fehlerfreiheit wird leider nicht garantiert!

1 Navier-Stokes-Gleichungen

Die Navier-Stokes¹-Gleichungen beschreiben auf einem Gebiet G die Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit. Es ist $u : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ das gesuchte Geschwindigkeitsfeld und $p : G \rightarrow \mathbb{R}$ der gesuchte Druck. In der Darstellung beschränke ich mich auf den dreidimensionalen Fall, für den zweidimensionalen ersetze man 3 durch 2 in allen Dimensions- und Vektordarstellungen. Mit f bezeichnen wir eine äußere Kraftdichte, die eine Beschleunigung der Bewegung verursachen kann.

$$-\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i \quad (\text{N1})$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad (\text{N2})$$

$$u = 0 \quad (\text{N3})$$

Bemerkungen: Gleichung (N1), physikalisch die Erhaltung der Impulse, existiert in drei Dimensionskomponenten. Sie wird zumeist geschrieben als $-\Delta u - \operatorname{grad} p = f$. Mit f bezeichnen wir eine auf das System einwirkende äußere Kraft, mit u das Geschwindigkeitsfeld. Dann ist der Laplace-Operator Δu (Strömung, in Physikbüchern auch: $\nabla^2 u$) Abkürzung für $\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$. Δu wird mit einer Viskositätskonstante μ [$\frac{kg}{ms}$] multipliziert, die hier auf 1 gesetzt wird. Der Gradient des Druckes p ist das Dreitupel $(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z})$. (N1) besitzt also 3 Freiheitsgrade.

In Gleichung (N2) fordern wir Volumentreue, d.h. die Erhaltung der Masse (Abwesenheit von Quellen und Senken, Inkompressibilität)².

In Gleichung (N3) ist als Vereinfachung angenommen, dass der Rand verschwindet (physikalisch oft realistisch), viele andere Probleme können durch geeignete Variablentransformation hierauf zurückgeführt werden. Diese Vereinfachung hat den großen Vorteil, dass in vielen partiellen Integrationen der Randterm wegfällt.

In Summe besitzt das Navier-Stokes-Problem in dieser Darstellung 4 Freiheitsgrade.

¹Zum geschichtlichen Hintergrund vergleiche auch [4] und [5].

²Physikalisch motiviert durch Kontinuitätsgleichung [13, S. 2, 22]: Volumenänderung ist physikalisch als $\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = \int \rho v df$ deutbar, es gilt nach Gauss $\int \rho v df = \int \operatorname{div}(\rho v) dV$, für alle V also $\int [\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v)] dV = 0$, deshalb $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0$, und insbesondere bei Inkompressibilität (ρ konstant) $\operatorname{div}(v) = 0$. In Lagrange-Formulierung auch durch Volumentreue im Konvektionssatz von Liouville [12, 14, S. 147-149 u. 170 bzw. 11] im Zeitpunkt 0 als $\frac{d}{dt} \operatorname{vol}(\Phi_t(A))|_{t=0} = \int_A \operatorname{div} v(x) dx$ motivierbar.

2 Rückblick: andere bekannte numerischen Aufgabenstellungen

Bei der Betrachtung eines numerischen Verfahrens interessiert man sich für die Existenz und Konvergenz von Lösungen. Zunächst erinnern wir an einige Ergebnisse der Numerik-II-Vorlesung.

2.1 Existenz und Konvergenz bei ODE-Anfangswertproblemen

Beim Einschrittverfahren von Anfangswertproblemen von gewöhnlichen DGL (ODE), war die Existenz (z.B. Picard-Lindelöf) für die in Numerik II gestellten Probleme aus der Vorlesung zu DGL bekannt. Die Konvergenz wurde in Numerik II aus Konsistenz und Stabilität [16, 2.13] gewonnen. Als Funktionenräume waren hier sowohl für Problemstellung wie die Lösung die stetigen Räume C^k ausreichend.

2.2 Existenz und Konvergenz bei einer einfachen PDE (Laplace-Gleichung)

Bei der in der Vorlesung als Beispiel für Finite Elemente untersuchten [16, Kap. 7] Laplace-Gleichung $-\Delta(x) = f(x)$ ("1 Freiheitsgrad") mit (Dirichlet-)Randbedingung $u(x) = 0$ kann man zeigen³, dass sie zu einer schwachen Formulierung $\sum_{i=1}^d \int_G \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_G f(x)v(x)dx$ (als Linearform $\langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle$) äquivalent ist, der Lösungsraum für die schwache Lösung ist hierbei der Sobolevraum $W^1(G)$ ⁴. Innerhalb des nun gewählten Lösungsraums gibt es wiederum dann eine Lösung genau dann, wenn ein Minimum für die Linearform $\langle Au, u \rangle - \langle f, u \rangle$ gefunden wurde⁵. Eine Konvergenzbetrachtung der Lösungen (auf dem Lösungsraum) wurde in der Vorlesung mithilfe des Lemmas von Céa durchgeführt.

³Zuerst Anwendung der Greenschen partiellen Integration mehrerer Variablen ($\int_G \frac{\partial f}{\partial x_i} g dx = \int_{\partial G} f g n_i dS - \int_G f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx$), danach fällt ∂G wegen der Randbedingung weg:

$$\begin{aligned} - \int_G \Delta u(x)v(x)dx &= - \int_G \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} v(x)dx = \\ &= - \int_{\partial G} \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)(x)n_j(x)dv + \sum_{j=1}^d \int_G \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \\ &= \sum_{j=1}^d \int_G \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_G f(x)v(x)dx \end{aligned}$$

Die letzte Zeile kann als $\langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle$ dargestellt werden.

⁴In der Vorlesung $W_0^{1,2}$, wobei die 2 sich auf die Wahl $p = 2$ bei der p -Norm des Hilbertraums bezieht. Da hier stets $p = 2$, in dieser Darstellung weggelassen.

⁵Satz vom Minimum eines quadratischen Funktionals, z. B. [15, 103-104]: A sei positiver Operator auf $V, f \in H$.

$\exists u \in V$ (stationärer Punkt) s.d. $Au = f$ in H genau dann wenn $Fu = \langle Au, v \rangle - 2 \langle f, v \rangle$ den Minimalwert u auf V annimmt.

Beweis: " \rightarrow ":

$$\begin{aligned} Fu &= \langle Av, v \rangle - 2 \langle Au, v \rangle = \langle Av, v \rangle - \langle Av, u \rangle - \langle v, Au \rangle \\ &= \langle Av, v \rangle - \langle Av, u \rangle - \langle Av, u \rangle \\ &= \langle Av, v \rangle - \langle Au, v \rangle - \langle Av, u \rangle + \langle Au, u \rangle - \langle Au, u \rangle \\ &= \langle A(v-u), u-v \rangle - \langle Au, u \rangle = \langle A(v-u), u-v \rangle + Fu, \end{aligned}$$

denn $Fu = \langle Av, u \rangle - 2 \langle f, v \rangle = \langle Au, u \rangle - 2 \langle Au, u \rangle = - \langle Au, u \rangle$.

" \leftarrow ": $F(u+tv) \geq Fu$, minimiere erste Variation $\frac{d}{dt} F(u+tv)|_{t=0} = 0$:

$$\begin{aligned} F(u+tv) &= \langle A(u+tv), u+tv \rangle - 2 \langle f, u+tv \rangle = \langle Au + tAv, u+tv \rangle - 2 \langle f, u \rangle - 2t \langle f, v \rangle \\ &= \langle Au, u \rangle + t \langle Av, u \rangle + t \langle Au, v \rangle + t^2 \langle Av, v \rangle - 2t \langle f, u \rangle - 2 \langle f, v \rangle \end{aligned}$$

3 Formulierungen des Navier-Stokes-Problems: Variation, Linearform, Operator

3.1 Variationsformulierung (V)

Durch Integration und partieller Multiplikation von N1, N2 erhalten wir die Variationsformulierung: $\forall v \in C_0^\infty(G)$:

$$\begin{aligned} \int_G f_i(x)v_i(x)dx &= \int_G [-\sum_{j=1}^d u_i(x) + \frac{\partial p}{\partial x_i}]v_i(x)dx \\ &= \int_G \sum_{j=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - p(x) \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (\text{V1})$$

und $\forall q \in L^2(G)$:

$$-\int q(x)\text{div } u(x)dx = 0 \quad (\text{V2})$$

3.2 Bilinearformen (B1,B2) auf $C_0^\infty(G)$

Sei

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= \int_G \sum_{j=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \\ b(p, v) &:= -\int q(x)\text{div } u(x)dx \\ f(v) &:= \int_G f(x)v dx \end{aligned}$$

So kann durch Ersetzen in V1, V2 das Navier-Stokes-Problem als Bilinearformen formuliert werden:

$$a(u, v) + b(v, \lambda) = \langle f, v \rangle \quad \forall u, v \in C_0^\infty(G) \quad (\text{B1})$$

$$b(u, \mu) = \langle g, \mu \rangle \quad \forall p \in L^2(G), v \in C_0^\infty(G) \quad (\text{B2})$$

Lemma Eine Lösung von (N1,N1) impliziert eine Lösung (V1,V2).

Beweis Folgt direkt aus der Konstruktion.

Lemma Eine Lösung (V1,V2) impliziert eine Lösung (N1,N2).

Beweis Sei für das Stokes-Problem $b(u, \mu) = 0 = \langle g, \mu \rangle$. Dann gilt umgekehrt, falls das Stokes-Problem (B1,B2) eine Lösung mit $u \in C^2(G), p \in C^1(G)$ hat, so folgt aus (B2) $b(u, u) = 0 \quad \forall u$ auch (V2) $\text{div } u = \sum_{j=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$, sowie aus (B1) für alle i : $v = v_i \in C_0^\infty, v_{j \neq i} = 0$ auch (V1) $\int_G f_i(x)v_i(x)dx = \int_G \sum_{j=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - p(x) \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i} = \int_G [-\sum_{j=1}^d u_i(x) + \frac{\partial p}{\partial x_i}]v_i(x)dx$ (partielle Integration in die umgekehrte Richtung).

3.3 Bilinearformen (W1,W2) auf $W_0^1(G), L^2(G)$

$$a(u, v) + b(v, \lambda) = \langle f, v \rangle \quad \forall u, v \in X = W_0^1(G) \quad (\text{W1})$$

$$b(u, \mu) = \langle g, \mu \rangle \quad \forall p \in M = L^2(G), v \in W_0^1(G) \quad (\text{W2})$$

Lemma Eine Lösung von (B) impliziert eine Lösung (W).

Beweis $W_0^1(G) \supset C_0^\infty, L^2(G) \supset C_0^\infty$

Lemma Eine Lösung von (W) impliziert eine Lösung (B).

Bemerkung Da C_0^∞ ist dicht in $W_0^1(G)$ und $a(u, v)$, $b(v, \lambda)$, $b(u, \mu)$ stetig von u, v in $W_0^1(G)$, ausführliche Behandlung in PDE II.

3.4 Minimumsformulierung (M)

Satz Das Problem (B) kann auch geschrieben werden als (M):

$$L(u, \lambda) := a(u, u) + 2b(\lambda, u) - 2f(u) - 2g(\lambda)$$

Dann gilt:

$$L(u, \mu) \leq L(u, \lambda) \tag{M1}$$

$$L(u, \lambda) \leq L(v, \lambda) \tag{M2}$$

für die Lösung (u, λ) und alle $u \in V, \lambda \in X$.

3.4.1 Beweis: (M1)→(B1).

$$\begin{aligned} L(u + tv, \lambda) - L(u, \lambda) &= a(u + tv, u + tv) - a(u, u) - 2 \langle f, u + tv \rangle + 2 \langle f, u \rangle + 2b(u + tv, \lambda) - 2b(u, \lambda) \\ &= a(u, u) - a(u, u) + 2a(u, tv) + a(tv, tv) - 2 \langle f, tv \rangle + 2b(tv, \lambda) \\ &= 2a(u, tv) + a(tv, tv) - 2 \langle f, tv \rangle + 2b(tv, \lambda) \\ &= 2at(u, v) + at^2(v, v) - 2t \langle f, v \rangle + 2bt(v, \lambda) \\ [L'(t) \rightarrow 0] &\rightarrow a(u, v) + 2b(v, \lambda) - 2 \langle f, v \rangle = 0 \end{aligned}$$

3.4.2 Beweis: (M2)→(B2)

$$\begin{aligned} L(u, \lambda + \alpha\mu) - L(u, \lambda) &= -2b(u, \lambda + \alpha\mu) + 2b(u, \lambda) - 2 \langle g, \lambda + \alpha\mu \rangle \\ &= -2b(u, \alpha\mu) + 2 \langle g, \alpha\mu \rangle \\ [L'(\alpha) \rightarrow 0] &\rightarrow -2b(u, \mu) + 2 \langle g, \mu \rangle = 0 \end{aligned}$$

3.4.3 Beweis: (B1)→(M1)

Wir bilden die Differenz zwischen dem Minimum u und einem anderen Wert $u + tv$ für ein beliebiges w :

$$\begin{aligned} [a(u, w) + 2b(u, \lambda) - 2 \langle f, u \rangle] - [a(u + tv, w) + 2b(u + tv, \lambda) - 2 \langle f, u + tv \rangle] \\ &= a(tv, tv) + [2a(tv, w) + 2b(tv, \lambda) - 2 \langle f, tv \rangle] \\ (B1) &= a(tv, tv) \geq 0 = L(u + tv) - L(u) \end{aligned}$$

(Koerzitivität).

3.4.4 Beweis: (B2)→(M2)

$$\begin{aligned} [-2b(u, \lambda) + 2 \langle g, \lambda \rangle] - [-2b(u, \lambda + \alpha\mu) + 2 \langle g, \lambda + \alpha\mu \rangle] \\ (B2) &= 0 = L(\lambda) - L(\lambda + \alpha\mu) \end{aligned}$$

4 Ein Finites Element (MINI) mit eingebauter Konvergenz

4.1 Gemischte Methoden

Bei der Navier-Stokes-Gleichung war die höchste Ableitung der Geschwindigkeit 2, die höchste Ableitung des Drucks 1. Wegen diesem Unterschied, gilt die Faustregel, dass die Polynome zur Approximation der Geschwindigkeiten um einen Grad höher sein sollte als die Polynome zur Approximation des Drucks (gemischte Methoden/mixed methods), praktische Erfahrungen waren hier jedoch zunächst der Art "mixed results"⁶.

4.2 MINI-Element

4.2.1 Begriffe von Finite-Element-Räumen aus der Vorlesung[16]

Triangulierung Ein Gebiet G zerlegen wir in Elemente, die affine Bilder eines Standard-elements sind. Wir definieren das Referenzelement $\hat{\Delta} = \{x \in \mathbb{R}^d, x_i \geq 0, \sum_{i=1}^d x_i \leq 1\}$, $d = 2$ (abgeschlossenes Dreieck mit Ecken $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$). Dann heißt $T_h(G) = T_h = \{\Delta\}$ 'Triangulierung von G ' wenn

- (i) $\Delta = F_\Delta(\hat{\Delta})$ mit einer affinen nichtsingulären Abbildung $F_\Delta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \forall \Delta \in T_h$
- (ii) $\overline{G} = \cup_{\Delta \in T_h} \Delta$
- (iii) $\Delta_1 \neq \Delta_2$ impliziert $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$, Eckpunkt von Δ_1 und Δ_2 oder Dreiecksseite von Δ_1 und Δ_2 .

Finite-Elemente-Räume Bei gegebener Triangulierung $T_h = \{\Delta\}$ und $m \in \mathbb{N}$ ist der Teilraum der Polynome k -ter Ordnung (also $(k - 1)$ -ten Grades) $P \subset C^m(\Delta)$ endlichdimensionaler Teilraum für $\Delta \in T_h$. Dann ist

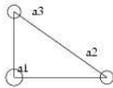
$$Z_h := \{v : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R} : v|_{\Delta} \in P \forall \Delta \in T_h; v \in C^{m-1}(\overline{G})\}$$

der Raum der P -Elemente zur Triangulierung T_h der verallgemeinerten Differenzierbarkeitssordnung m .

Für den Raum P können wir eine polynomiale Basis angeben:

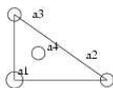
$$P \equiv \mathbb{P}_k = \text{span}(\{x^\alpha := \prod_{i=1}^d x_i^{\alpha_i} : \sum_i \alpha_i = |\alpha| \leq k - 1\} \forall \Delta \in T_h(G))$$

4.2.2 Beispiel: zweidimensionales Dreieckselement K (3 Freiheitsgrade)



Eine Basis für Dreieckselement Δ ist $P_M : \{1, x_1, x_2\} = \mathbb{P}_2$, eine Lagrangebasis mit $\lambda_i \in P$ und $\lambda(a_j) = \delta_{ij}$ für $1 \leq i, j \leq 3$ ist $\{x_1, x_2, 1 - x_1 - x_2\}$.

4.2.3 Beispiel: zweidimensionales Dreieckselement B mit Schwerpunkt(4 Freiheitsgrade)



Eine Basis für Blasenelement B ist $P_X : \{1, x_1, x_2, B(x_1, x_2)\} = \text{span}\{\mathbb{P}_2, B\}$, eine Lagrangebasis mit $\lambda_i \in P$ und $\lambda(a_j) = \delta_{ij}$ für $1 \leq i, j \leq 3$, $\lambda_4(a_j) = 0$ für $1 \leq j \leq 3$ und $\lambda(a_4) > 0$ ist $\{x_1, x_2, 1 - x_1 - x_2, B(x_1, x_2) = x_1 x_2 (1 - x_1 - x_2)\}$.

⁶[3, 17, S. 143]

4.2.4 Das zweidimensionale MINI-Element⁷ M

Für das MINI-Element werden P_M für den Druck und P_X für die Geschwindigkeiten übereinandergelegt.

Für Betrachtungen des Drucks gilt weiterhin, dass das Druckfeld als $p = p_0 + const$ gesehen wird, den Schnitt des Raums $L^2(G)$ modulo konstantem Druck bezeichnen wir als $L_*^2(G)$.

Die Basis $X_h \oplus M_h$ eines aus zweidimensionalen MINI-Elementen aufgebauten Finite-Element-Raums besteht folglich aus:

$$\begin{aligned} X_h &= [\{v|_{\Delta} \in P_X \forall \Delta \in T_h; v \in C^0(\bar{G}) \cap W_0^1(G)\}]^2 \\ M_h &= \{q|_{\Delta} \in P_M \forall \Delta \in T_h; q \in C^0(\bar{G}) \cap L_*^2(G)\} \end{aligned}$$

4.3 Stabilitätsbeweis von MINI durch Inf-Sup-Bedingung und Fortins Kriterium

4.3.1 Adjungierte Operatoren

Definition Seien X und Y Banach-Räume, deren Dualräume mit X' und Y' bezeichnet werden. Sei $L : X \rightarrow Y$ ein beschränkter linearer Operator. Zu $y_* \in Y'$ wird durch $x \mapsto l_{y_*}(x) := \langle y_*, Lx \rangle$ ein stetiges, lineares Funktional auf X erklärt. Die Abbildung $L' : Y' \rightarrow X' : y_* \mapsto l_{y_*}$ ($\langle L'y_*, x \rangle := \langle y_*, Lx \rangle$) ist der zu L adjungierte Operator. Sei V ein abgeschlossener Unterraum von X . Dann ist:

V^\perp das orthogonale Komplement von V :

$$V^\perp : = \{x \in X; (x, v) = 0 \forall v \in V\}$$

V^0 die polare Menge von V :

$$V^0 : = \{l \in X'; \langle l, v \rangle = 0 \forall v \in V\}$$

4.3.2 Inf-Sup-Satz für ein allgemeines Variationsprinzip⁸

Bemerkung Der Linearform $a : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ werde der lineare Operator $L : U \rightarrow V'$ durch $\langle Lu, v \rangle := a(u, v) \forall v \in V$ zugeordnet. Das Variationsproblem ist der Art, dass zu gegebenen $f \in V'$ gesucht wird ein $u \in U$, so dass $a(u, v) = \langle f, v \rangle \forall v \in V$, formal $u = Lf^{-1}$.

Satz Seien U und V Hilberträume. Eine lineare Abbildung $L : U \rightarrow V'$ ist genau dann ein Isomorphismus (L und L^{-1} sind stetig), wenn die zugehörige Form $a : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt:

- (i) Stetigkeit: mit $C \geq 0$:
 $|a(u, v)| \leq C * \|u\|_U * \|v\|_V$
- (ii) (Inf-Sup-Bedingung). Es existiert ein $\alpha > 0$:

$$\inf_{u \in U} \sup_{v \in V} \frac{a(u, v)}{\|u\|_U \|v\|_V} \geq \alpha$$

Gleichwertige Formulierungen:

⁷Z.B. [1] oder [8, S. 174].

⁸[3, S. 117], [2, S. 112-115]

$$\begin{aligned} \sup_{v \in V} \frac{a(u, v)}{\|v\|_V} &\geq \alpha \|u\|_U \quad \forall u \in U \\ \|Lu\|_{V'} &\geq \alpha \|u\|_U \quad \forall u \in U \end{aligned}$$

(iii) Zu jedem $v \in V$ gibt es ein $u \in U$ mit:

$$a(u, v) \neq 0$$

Beweis

- (i) $\rightarrow L$ ist stetig: Nehme L als stetig in 0 an. Für ein $\varepsilon > 0$, wähle $\delta > 0$, so dass für $\|u' - 0\|_U < \delta$ gilt $\|Lx' - 0\|_V < \varepsilon$. Dann gilt für $\|u'' - u\|_U$ wegen Linearität $\|Lu'' - Lu\|_U = \|L(u'' - u) - 0\|_U < \delta$, Stetigkeit in 0 impliziert also Stetigkeit. Da $\|u\|_U = \|u - 0\|_U$ ist Stetigkeit in 0 gleichwertig zur Beschränktheit.
- (ii) $\rightarrow L$ ist injektiv:

$$Lu_1 = Lu_2 \rightarrow a(u_1, v) = a(u_2, v) \quad \forall v \in V \rightarrow \sup_v a(u_1 - u_2, v) = 0 \rightarrow u_1 - u_2 = 0$$
- (ii) \rightarrow Eindeutigkeit der Inversen $u = L^{-1}f$: folgt aus Injektivität von L .
- (ii) \rightarrow Stetigkeit von L^{-1} : $\alpha \|u\|_U \leq \sup_{v \in V} \frac{a(u, v)}{\|v\|_V} = \sup_{v \in V} \frac{\langle f, v \rangle}{\|v\|_V} = \|f\|$
- (iii) \rightarrow Surjektivität von L . $L : U \rightarrow \{v \in V; a(u, v) = 0 \quad \forall u \in U\}^0 \subset V'$, $L(U)$ ist die Polare des Nullelements.

Bemerkung Falls $U = V$ folgt Koerzitivität (vgl. Numerik I).

4.3.3 Inf-Sup-Satz für Sattelpunktprobleme⁹

Definition: Hilfsraum V Zusätzlich zur den bekannten Räumen M und X in Formulierung (W1, W2) definieren wir $V := \{v \in X; b(v, \mu) = 0\} \quad \forall \mu \in M$ und $V(g) := \{v \in X; b(v, \mu) = \langle g, \mu \rangle\} \quad \forall \mu \in M$. Da b stetig, ist V abgeschlossener Unterraum von X .

Darstellung von (W1, W2) in Operatorform

$$\begin{aligned} Au + B'\lambda &= f \\ Bu &= g \end{aligned}$$

Satz (i) es existiert eine Konstante $\beta > 0$, so dass:

$$\inf_{\mu \in M} \sup_{v \in V} \frac{b(v, \mu)}{\|v\|_X \|\mu\|_M} \geq \beta > 0$$

(ii) der Operator B ist ein Isomorphismus von V^\perp auf M' und

$$\|Bv\|_{M'} \geq \beta \|v\|_X \quad \forall v \in V^\perp$$

(iii) der Operator B' ist ein Isomorphismus von M nach $V^0 \subset X$ und

$$\|B'\mu\|_{X'} \geq \beta \|\mu\|_M \quad \forall \mu \in M$$

⁹[3, S. 123]

Beweis (i) \leftrightarrow (iii): Satz für Inf-Sup auf Variationsproblemen (ii).

(iii) \rightarrow (ii): Für $v \in V^\perp$ ist durch $w \mapsto (v, w)$ ein Funktional $g \in V^0$ erklärt. Da B' ein Isomorphismus ist, gibt es $\lambda \in M$ mit $b(w, \lambda) = (v, w) \forall w$. Per Definition von g gilt $\|g\| = \|v\|$, und durch (iii) gilt $\|v\| = \|g\| = \|B'\lambda\| \geq \beta\|\lambda\|$. Setze $w = v$, dann gilt:

$\sup_{\mu \in M} \frac{b(v, \mu)}{\|\mu\|} \geq \frac{b(v, \lambda)}{\|\lambda\|} = \frac{(v, v)}{\|\lambda\|} \geq \beta\|v\|$. Damit ist $B : V^\perp \rightarrow M'$ ein Isomorphismus.

(ii) \rightarrow (i): Sei $\mu \in M$:

$$\begin{aligned} \|\mu\| &= \sup_{g \in M'} \frac{\langle g, \mu \rangle}{\|g\|} = \sup_{v \in V^\perp} \frac{\langle Bv, \mu \rangle}{\|Bv\|} \\ &= \sup_{v \in V^\perp} \frac{b(v, \mu)}{\|Bv\|} \leq \sup_{v \in V^\perp} \frac{b(v, \mu)}{\beta\|v\|} \end{aligned}$$

4.3.4 Hauptsatz für Sattelpunktprobleme¹⁰

Satz Es wird ein Isomorphismus $L : X \times M \rightarrow X' \times M'$ erklärt, wenn die Bedingungen erfüllt sind:

(i) Die Bilinearform a ist V -elliptisch, d.h. mit $\alpha > 0$ und $V: a(v, v) \geq \alpha\|v\|^2 \forall v \in V$.

(ii) Die Bilinearform b erfüllt die Inf-Sup-Bedingung.

Beweis (i) u. (ii) \rightarrow Isomorphismus: Seien die Bedingungen von a und b erfüllt. Z.z. jedes Paar $(f, g) \in X' \times M'$ gibt es genau eine Lösung (u, λ) des Sattelpunktproblems mit (*): $\|u\| \leq \alpha^{-1}\|f\| + \beta^{-1}(1 + \frac{C}{\alpha}\|g\|)$ und $\|\lambda\| \leq \beta^{-1}(1 + \frac{C}{\alpha})\|f\| + \beta^{-1}(1 + \frac{C}{\alpha})\frac{C}{\beta}\|g\|$.

Nach dem Satz Inf-Sup-Satz für Sattelpunktprobleme gibt es ein $u_0 \in V^\perp$, so dass $Bu_0 = g$. Ausserdem $\|u_0\| \leq \beta^{-1}\|g\|$.

Mit $w := u - u_0$ ist (W1, W2) äquivalent zu (U1):

$$\begin{aligned} a(w, v) + b(v, \lambda) &= \langle f, v \rangle - a(u_0, v) \forall v \in X \\ b(w, \mu) &= 0 \forall \mu \in M \end{aligned}$$

Wegen der angenommenen V -Elliptizität von a nimmt $\frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v \rangle + a(u_0, v)$ Minimum bei einem $w \in V$ an, und $\|w\| \leq \alpha^{-1}(\|f\| - C\|u_0\|)$, insbesondere $a(w, v) = \langle f, v \rangle - a(u_0, v) \forall v \in V$. Um (U1) zu lösen, suchen wir ein $B'\lambda$ mit $\lambda \in M$, so dass $b(v, \lambda) = \langle f, v \rangle - a(u_0, v) \forall v \in X$. Das Funktional X' ist bereits in V^0 enthalten. Nach dem Inf-Sup-Satz für Sattelpunktprobleme (iii) kann X' dargestellt werden als $B'\lambda$ ($\lambda \in M$) und $\|\lambda\| \leq \beta^{-1}(\|f\| + C\|u_0\|)$.

Die Lösung ist eindeutig (die zweite Gleichung in U2 ist homogen). Setzen wir in (W1, W2) $f = 0, g = 0, v = u, \mu = -\lambda$ und addieren (W1) und (W2), so ist $a(u, u) = 0$. Wegen $u \in V$ und V -Elliptizität folgt $u = 0$. Weiter ist: $\sup_v |b(v, \lambda)| = 0$, also $\lambda = 0$. L ist also injektiv und surjektiv und L^{-1} stetig wegen (*).

Isomorphismus \rightarrow (i): Sei $\|L^{-1}\| \leq C$. Zu jedem $f \in V'$ existiert nach Hahn-Banach eine Erweiterung $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\|\tilde{f}\| = \|f\|$. Sei $(u, \lambda) = L^{-1}(\tilde{f}, 0)$. Dann ist ein Minimum von $\frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v \rangle$ in V . Die Abbildung $f \mapsto u \in V$ ist beschränkt. Also ist a auch V -elliptisch.

Isomorphismus \rightarrow (ii): Es werde jedem $g \in M'$ durch $(u, \lambda) = L^{-1}(0, g)$ ein $u \in X$ mit $\|u\| \leq c\|g\|$ zugeordnet. Zu $u \in X$ bestimme man die Projektion $u^\perp \in V^\perp$. Wegen $\|u^\perp\| \leq \|u\|$ ist $g \mapsto u \mapsto u^\perp$ beschränkt, also $Bu^\perp = g$. Also ist $B : V^\perp \rightarrow M'$ ein Isomorphismus, b erfüllt inf-sup-Bedingung.

¹⁰[3, S. 124-125]

4.3.5 Inf-Sup-Satz für den diskreten Fall: Fortins Kriterium¹¹

Satz Wenn eine Bilinearform $b : X \times M \rightarrow \mathbb{R}$ eine inf-sup-Bedingung erfüllt und es einen beschränkten ($\|\Pi_h\| \leq c$), linearen Projektor gibt, so dass $b(v - \Pi_h v, \mu_h) = 0 \forall M_h$, dann erfüllen auch die Finite-Elemente-Räume X_h, M_h die inf-sup-Bedingung.

Beweis

$$\begin{aligned} \beta \|\mu_h\|_M &\leq \sup_{v \in X} \frac{b(v, \mu_h)}{\|v\|_X} = \sup_{v \in X} \frac{b(\Pi_h v, \mu_h)}{\|v\|_X} \\ &\leq c * \sup_{v \in X} \frac{b(\Pi_h v, \mu_h)}{\|\Pi_h v\|_X} = c * \sup_{v_h \in X_h} \frac{b(v_h, \mu_h)}{\|v_h\|_X} \end{aligned}$$

4.3.6 Hauptsatz für den diskreten Fall (Skizze)¹²

Definition: regulär Das Navier-Stokes-Problem (N1,N2,N3) ist *regulär*¹³, wenn $u \in W^2(G)$ und $p \in W^1(G)$, falls f in $L^2(G)$ und $\|u\|_{2,W} + \|p\|_{1,G} \leq C\|f\|_{0,G}$. Dies ist z.B. erfüllt sobald der Rand ∂G in C^2 ist.

Definition: Näherungsproblem W_h Durch partielle Integration erhalten wir da die Gradienten der Drücke stückweise konstant sind: $b(v_h, \mu_h) = (\text{grad } \mu_h, v_h) = -(\text{div } v_h, \mu_h) \forall v \in X_h \forall \mu_h \in M_h$ da $M_h \subset W^1(G)$.

Das Näherungsproblem W_h ist: finde ein Paar (u_h, λ_h) in $X_h \times M_h$, so dass:

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) - (\lambda_h, \text{div } u_h) &= \langle f, v_h \rangle \forall v_h \in X_h \\ (\text{div } u_h, \mu_h) &= 0 \forall \mu \in M_h \end{aligned}$$

Definition H1 (Approximationseigenschaft von X_h) Es gibt einen Operator r_h so dass $\|v - r_h v\|_{1,G} \leq Ch^m \|v\|_{m+1,G} \forall v \in X_h$.

Definition H2 (Approximationseigenschaft von M_h) Es gibt einen Operator S_h , so dass $\|\mu - S_h \mu\|_{0,G} \leq Ch^m \|\mu\|_{m,G} \forall \mu \in M_h$.

Definition H3 (inf-sup-Bedingung) Inf-Sup-Bedingung im diskreten Fall (Fortins Kriterium).

Satz Wenn die Hypothesen H1, H2, H3 erfüllt sind, so hat W_h eine eindeutige Lösung $(u_h, \lambda_h) \in X_h \times M_h$. Ausserdem konvergiert (u_h, λ_h) zur Lösung (u, p) des Problems (W1,W2) mit $\lim_{h \rightarrow 0} \{\|u_h - u\|_1 + \|\lambda_h - \lambda\|_0\} = 0$. Darüberhinaus, falls (u, λ) regulär ist mit einer Glattheit m , so gibt es eine Fehlerschranke: $\|u - u_h\|_1 + \|\lambda - \lambda_h\|_1 \leq Ch^m \{\|u\|_{m+1} + \|\lambda\|_m\}$

Bemerkung In dem hier nicht weiter ausgeführten Beweis geht wesentlich die inf-sup-Bedingung im stetigen Fall ein.

¹¹[7], [8, S. 117],[3, S. 128, 149-150]

¹²[8, S. 125-126]

¹³[8, S. 126]

4.4 Anwendung des diskreten Hauptsatzes auf das MINI-Element¹⁴

Der Interpolationsoperator r_h definiert durch $r_h v(a) = v(a)$ für alle Knoten a von T_h , $r_h v(a_\Delta) = v(a_\Delta)$ im Schwerpunkt a_Δ von $\Delta \forall \Delta \in T_h$, $r_h v \in \mathbb{P}_2$ auf jedem Δ erfüllt H1, ebenso erfüllt der Operator auf den Drücken H2.

Um Fortins Kriterium und damit H3 zu erfüllen, definiere einen Projektor $\Pi_h : X \rightarrow X_h = \pi_h^0 u + \pi_h^1(u - \pi_h^0)$ mit $\pi_h^0 : X \rightarrow X_h$ über Lösung u einer Helmholtz-Gleichung ($-\Delta u_i + u_i =: r_i$). Die Lösung ist eine Galerkinnäherung aus X_h an Lösung U_i . $(\nabla(\pi_h^0 u), \nabla v)_0 + (\pi_h^0 u, v)_0 = (\nabla u, \nabla v)_0 + (u, v)_0$ für $v \in X_h$. Es ist $\tilde{a}(v, w) := (\nabla v, \nabla w)_{L_2(G)} + (v, w)_{L_2(G)}$, und unter Benutzung der Friedrichschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} \tilde{a}(u_h, w_h) &= \tilde{a}(u, w_h), w_h \in X_h, v \in W_0^1 : \tilde{a}(v, v) = (\nabla v, \nabla v) + (v, v) \\ &\geq c \|v\|_1^2 \forall v \in V^\perp \end{aligned}$$

(Dann ist $\|\pi_h^0 u\|_1 \leq \|u\|_1$ und $\|\pi_h^0 u - u\|_0 \leq c_1 h \|\pi_h^0 u - u\|_1 \leq c_2 h \|u\|_1$.) und $\pi_h^1 : L_2(G) \rightarrow B_3$ mit $\int_T (\pi_h^1 u - u) dx = 0$ und $\|\pi_h^1\|_0 \leq c_3 \|v\|_0$.

Lemma Π_h ist beschränkt.

Beweis

$$\begin{aligned} \|\Pi u\|_1 &\leq \|\pi_h^0 u\|_1 + c_4 h^{-1} \|\pi_h^1(u - \pi_h^0 u)\|_0 \leq c_2 \|u\|_1 + c_4 h^{-1} c_3 \|u - \pi_h^0 u\|_0 \\ &\leq c_2 \|v\|_1 + c_4 c_3 c_2 \|v\|_1. \end{aligned}$$

Korollar Es gelten die Bedingungen für Fortins Kriterium, damit die Bedingungen H1-H3 für den Hauptsatz im diskreten Fall und die Stabilität ist bewiesen.

References

- [1] D. Arnold, F. Brezzi, M. Fortin, A stable finite element for the Stokes equations, *Calcolo* 21 (1984), 337-344.
- [2] I. Babuska, A. K. Aziz, Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method, in: A. K. Aziz, *The mathematical foundation of the finite element method with application to partial differential equations*, Associated Press, New York und London 1972.
- [3] D. Braess, *Finite Elemente*, Springer 1997. (Bemerkung: Die vorliegenden Darstellung orientiert sich am engsten an dieser Quelle.)
- [4] M. Cannone / S. Friedlander, Navier: Blow-up and Collapse, *Notices of the AMS*, Jan 2003, 7-13.
- [5] O. Darrigol, Between hydrodynamics and elasticity theory: the first five births of the Navier-Stokes equation, *Arch. Hist. Exact Sci.* 56(2002) 95-150.
- [6] G. Duvaut, J. L. Lions, *Les inequations en mecanique et physique*, Dunid, Paris 1976. (Bzw. englische Ausgabe *Inequations in mathematics and physics*.)
- [7] M. Fortin, An analysis of the convergence of finite element methods, *R.A.I.R.O. Analyse numerique* 11/4(1977), 341-354.

¹⁴[8, S. 174-176][3, S. 149-150]

- [8] V. Girault, P.-A. Raviart, Finite element methods for Navier-Stokes equations, Springer Berlin 1986.
- [9] W. Hackbusch, Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen, Teubner Stuttgart 1986.
- [10] C. Johnson, Numerical solutions of PDE by the FEM, Cambridge Univ. Press 1987.
- [11] Jost, Postmodern analysis, Springer 1998.
- [12] Königsberger, Analysis 2, 5. Auflage, Springer 2003.
- [13] Landau / Lifschitz, Hydrodynamik, Akademie-Verlag, Berlin 1991.
- [14] R. Meyer, Introduction to mathematical fluid dynamics, Wiley, New York 1971.
- [15] K. Rektorys, Variationsrechnung in Mathematik, Physik und Technik, Hanser, München 1984.
- [16] E. Schäfer, Skriptum zur Numerik 2 Vorlesung Mathematik LMU München, 2006.
- [17] G. Strang 1973, Finite Element Method